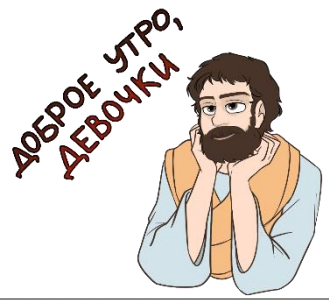


В задачах второй части недостаточно получить правильный ответ

Нужно, чтобы решение соответствовало критериям

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

13.1 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AA_1 отмечена точка K, причём $AK:KA_1 = 1:3$. Через точки K и B проведена плоскость α, параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M — середина ребра DD_1.

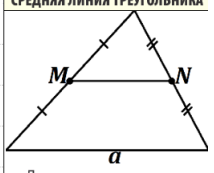
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = 5$, $AA_1 = 4$.

Ответ:

Источники:

FIPI (новый банк)
Гордин #14 2019
Досрочная волна 2018
Пробный ЕГЭ 2016

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

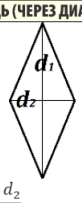
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Если две стороны равны и параллельны

Если противоположные стороны попарно равны

Если диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам

ПЛОЩАДЬ (ЧЕРЕЗ ДИАГОНАЛИ)



$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

13.2 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

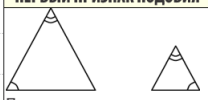
474248

Ответ:

Источники:

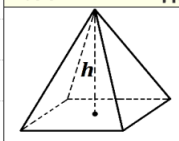
FIPI (старый банк)
Досрочная волна 2015

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



По двум углам

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

13.3 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 4$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 3 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

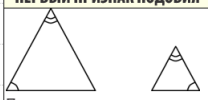
132142

Ответ:

Источники:

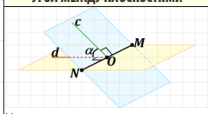
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Досрочная волна 2015

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



По двум углам

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



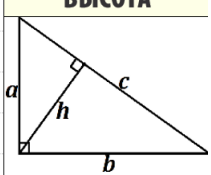
Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



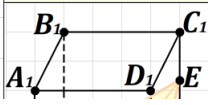
Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

ВЫСОТА



$h = \frac{ab}{c}$

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



13.4 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 6:1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB = 3:4$, а точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Ответ:

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Гордин #14 2019

КАК СТРОИТЬ СЕЧЕНИЯ

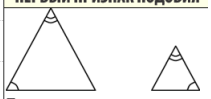
Проводим прямые через две точки, лежащие на одной грани

Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым

Метод следов (построение вспомогательной прямой, являющейся линией пересечения секущей плоскости с плоскостью грани фигуры)

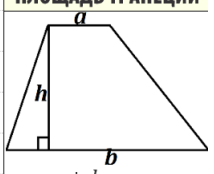
Если секущая плоскость проходит через прямую, параллельную плоскости, то она пересекает эту плоскость по прямой, параллельной начальной прямой

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



По двум углам

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

13.5 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 3:1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB = 1:3$, а на ребре B_1C_1 — точка T так, что $B_1T:TC_1 = 1:2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью BB_1C_1.

Ответ:

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2022 (50 вар)
Ященко 2022 (14 вар)
Ященко 2021 (10 вар)
Ященко 2020 (10 вар)
Ященко 2020 (14 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2020 (50 вар)
Ященко 2019 (50 вар)
Ященко 2019 (14 вар)

КАК СТРОИТЬ СЕЧЕНИЯ

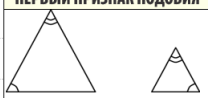
Проводим прямые через две точки, лежащие на одной грани

Плоскость сечения пересекает параллельные грани по параллельным прямым

Метод следов (построение вспомогательной прямой, являющейся линией пересечения секущей плоскости с плоскостью грани фигуры)

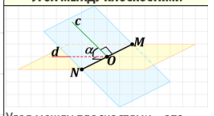
Если секущая плоскость проходит через прямую, параллельную плоскости, то она пересекает эту плоскость по прямой, параллельной начальной прямой

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



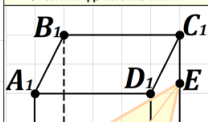
По двум углам

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



13.6 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

На рёбрах DD_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 7$, а $B_1Q = 3$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

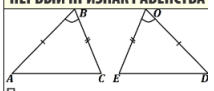
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости A_1PQ.

Ответ:

Источники:

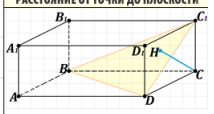
Основная волна (Резерв) 2016

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА



По двум сторонам и углу между ними

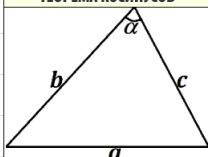
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ



Расстояние от точки до плоскости можно найти как высоту пирамиды, выразив объём двумя способами

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BDC_1} \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot CC_1$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

13.7 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 10$, $AB = 12$.

8A0B46

Ответ:

Источники:

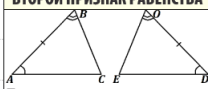
FIPI (старый банк)

FIPI (новый банк)

Гордин #14 2019

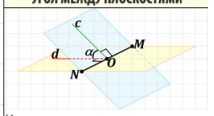
Досрочная волна 2017

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА



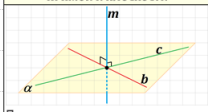
По стороне и двум, прилежащим к ней углам

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



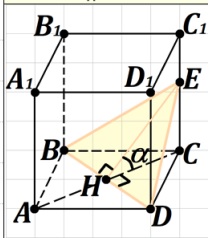
Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведёнными в этих плоскостях

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



Находим угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции сечения

$\cos\alpha = \frac{S_{\text{проекции}}}{S_{\text{сечения}}}$

13.8 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

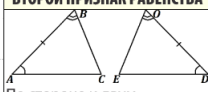
а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Ответ:

Источники:

Гордин #14 2019
Сергеев 2018
Досрочная волна 2016

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА



По стороне и двум, прилежащим к ней углам

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



По двум углам

13.9 Куб, прямоугольный параллелепипед или четырёхугольная призма (13.1 - 13.9)

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = 4$, $C_1L = 5$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

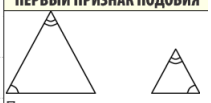
а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости γ.
б) Найдите расстояние от точки B_1 до плоскости γ.

Ответ:

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2016

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ



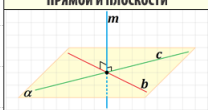
По двум углам

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

13.10 Треугольная призма (13.10)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

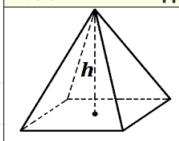
б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

Ответ:

Источники:

Досрочная волна 2016

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$$

13.11 Четырёхугольная пирамида (13.11 - 13.13)

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{11}$, $SB = 3\sqrt{3}$, $SD = 2\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

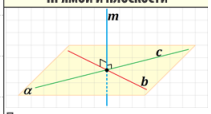
CB3CC8

Ответ:

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2015
Ященко 2019 (36 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Ященко 2018 (36 вар)
Материалы для экспертов ЕГЭ

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

13.12 Четырёхугольная пирамида (13.11 - 13.13)

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 3$, $SB = 5$, $SD = 3\sqrt{5}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

DCA9B6

Ответ:

13.13 Четырёхугольная пирамида (13.11 - 13.13)

Дана пирамида $PABCD$, в основании – трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.

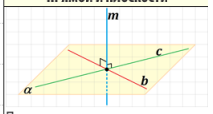
а) Докажите, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.
б) Найдите объём $PKBC$, если $AB = BC = CD = 2$, а $PK = 12$.

Ответ:

Источники:

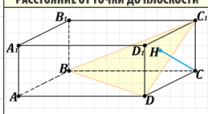
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2018 (36 вар)
Материалы для экспертов ЕГЭ

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ



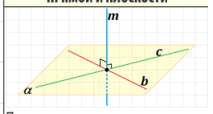
Расстояние от точки до плоскости можно найти как высоту пирамиды, выразив объём двумя способами

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BDC_1} \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot CC_1$

Источники:

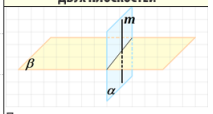
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Гордин #14 2019
Основная волна 2017

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



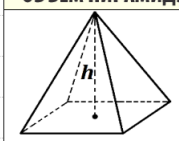
Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Плоскости перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$

13.14 Треугольная пирамида (13.14 - 13.17)

В треугольной пирамиде $SABC$ известны боковые рёбра: $SA = SB = 13$, $SC = 3\sqrt{17}$. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы CM треугольника ABC. Эта высота равна 12.

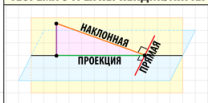
а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

Ответ:

Источники:

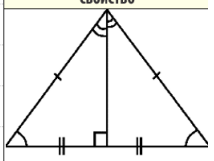
Основная волна 2017

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



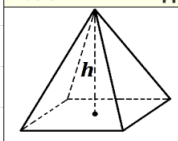
Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

СВОЙСТВО



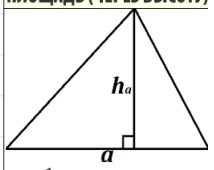
Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



$$V = \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot h$$

ПЛОЩАДЬ (ЧЕРЕЗ ВЫСОТУ)



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

13.15 Треугольная пирамида (13.14 - 13.17)

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

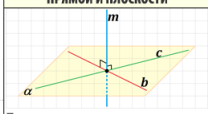
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите объём пирамиды $PABC$.

Ответ:

Источники:

Гордин #14 2019
Основная волна (Резерв) 2017

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

13.16 Треугольная пирамида (13.14 - 13.17)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

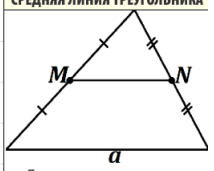
257425

Ответ:

Источники:

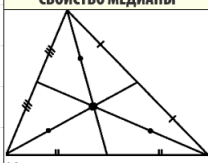
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2019 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2015

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



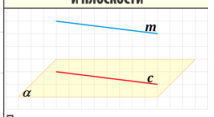
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



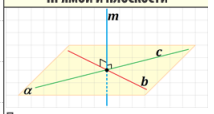
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым,

13.17 Треугольная пирамида (13.14 - 13.17)

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.

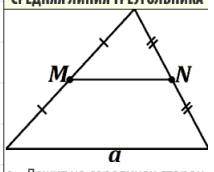
29565E

Ответ:

Источники:

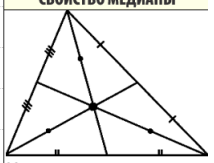
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)
Гордин #14 2019
Ященко 2018 (10 вар)
Ященко 2018 (30 вар)
Материалы для экспертов ЕГЭ
Основная волна 2015

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



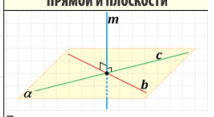
- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СВОЙСТВО МЕДИАНЫ



Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости

ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ



13.18 Круглые тела (13.18 - 13.20)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

Ответ:

Источники:

FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Основная волна 2018

ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной

ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ТТП



Прямая, проведённая в плоскости и перпендикулярная наклонной, перпендикулярна и проекции наклонной на эту плоскость

13.19 Круглые тела (13.18 - 13.20)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C, а на окружности другого основания – точка C_1, причём CC_1 – образующая цилиндра, а AC – диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45°$, $AB = CC_1 = \sqrt[4]{8}$.

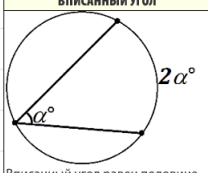
а) Докажите, что угол между прямыми BC_1 и AC равен 60°.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Ответ:

Источники:

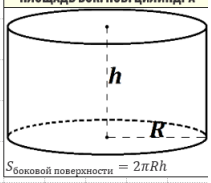
FIPI (старый банк)
FIPI (новый банк)
Ященко 2021 (36 вар)
Ященко 2020 (36 вар)
Ященко 2019 (36 вар)

ВПИСАННЫЙ УГОЛ



Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается

ПЛОЩАДЬ БОК. ПОВ. ЦИЛИНДРА



$S_{\text{боковой поверхности}} = 2\pi Rh$

13.20 Круглые тела (13.18 - 13.20)

В конусе с вершиной S и центром основания O радиус основания равен 13, а высота равна $3\sqrt{41}$. Точки A и B — концы образующих, M — середина SA, N — точка в плоскости основания такая, что прямая MN параллельна прямой SB.

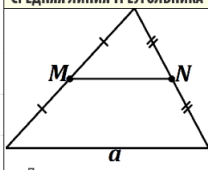
а) Докажите, что ANO — прямой угол.
б) Найдите угол между MB и плоскостью основания, если дополнительно известно, что $AB = 10$.

Ответ:

Источники:

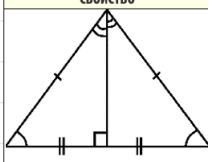
Досрочная волна (Резерв) 2019

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



- Лежит на серединах сторон
- Параллельна основанию
- Равна половине основания

СВОЙСТВО



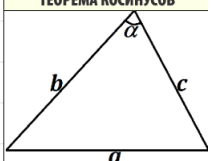
Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, равны

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ



Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и её проекцией на плоскость

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$